Examen de Admisión a la Maestría / Doctorado
2021-II

Nombre: ____

Instrucciones: Para cada pregunta hay una y solo una respuesta correcta.
Duración del examen: 2 horas

1. Considera los siguientes conjuntos.

   1) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 3x_3 = 2\}$;
   2) el conjunto de matrices de 2×2 tales que $\det(A) = 0$;
   3) el conjunto de polinomios $p(x)$ con $\int_{-1}^{1} p(x)dx = 0$;
   4) el conjunto de números reales con la suma dada por $x \oplus y = xy$ y la multiplicación por escalares dada por $a \otimes x = x^a$.

   ¿Cuál de las siguientes es la lista completa de los espacios vectoriales?

   a) 1);
   b) 1) y 2);
   c) 3) y 4);
   d) 3).
   e) 2)

2. ¿Cual de las siguientes afirmaciones sobre la matriz A es FALSA?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

   a) A es invertible,
   b) Si $x \in \mathbb{R}^5$ y $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
   c) La última fila de A^2 es $(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 25)$.
   d) A se puede transformar en la matriz identidad 5×5 por medio de operaciones elementales fila.
   e) $\det(A) = 120$.

3. Si $T : U \to V$ es una transformación lineal de U en V entonces

   a) el núcleo de T es un subespacio de V;
   b) la imagen de T es un subespacio de U;

c) el núcleo de T es un subespacio de U;

d) la imagen de T es un subespacio de U;

e) V es la imagen de T si y solo si $\ker T = \{0\}$.

4. Sea A una matriz de 5×5 con entradas reales y $x \neq 0$. Entonces los vectores $x, Ax, A^2x, A^3x, A^4x, A^5x$ son

a) linealmente independientes.

b) linealmente dependientes.

c) linealmente independientes si y solo A es simétrica.

d) no se puede determinar la dependencia lineal de la información dada.

e) no son todos distintos de cero.

5. Sean A y B dos matrices complejas Hermitianas de $n \times n$ y sean

$$C_1 = A + B, C_2 = iA + (2 + 3i)B \text{ y } C_3 = AB.$$

¿Cuáles de C_1, C_2 y C_3 son Hermitianas?

a) solo C_1;

b) solo C_2;

c) solo C_3;

d) todas;

e) ninguna.

6. Sea V el espacio vectorial de los números reales sobre el campo de los números racionales. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es la verdadera?

a) $\dim(V)$ es numerable;

b) $\dim(V)$ no es numerable;

c) $\dim(V) = 1$;

d) V no tiene base.

e) V no es un espacio vectorial.

7. Sea V el espacio de los polinomios de grado menor o igual a 2 con coeficientes en $\mathbb{R}$, equipado con el producto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

¿Cuál de las siguientes es una base ortonormal para V?

a) $\operatorname{sen}(t), \cos(t)$;

b) $1, t, t^2$;

c) $1, t, \frac{t^2}{\sqrt{2}}$;

d) $1, 2\sqrt{3}(t-\frac{1}{2}), 6\sqrt{5}(t^2-t+\frac{1}{6})$;

e) $1, (t-\frac{1}{2}), (t^2-t+\frac{1}{6})$.

8. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 6 & 1 & -6 \\ -6 & 6 & 13 \end{pmatrix}$. ¿Cúal de las siguientes es una base para el eigenespacio correspondiente al eigenvalor $\lambda = 7$?

   a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$;

   b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$;

   c) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$;

   d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$;

   e) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

9. Considere a $V = \mathbb{Z}_3^n$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_3$. ¿Cuántos subespacios de dimensión 1 tiene V?

   a) $(3^n - 1)/2$;

   b) $(3^n - 1)$;

   c) $3n$;

   d) $3n/2$

   e) 1.

10. Un grafo G es un par (V, E) donde $V = \{1, \ldots, n\}$ es un conjunto de vértices, y E es un conjunto de pares de vértices llamados *aristas*. Si $\{i, j\} \in E$ decimos que i y j son adyacentes. Sea A la matriz de $n \times n$ donde $A_{ij} = 1$ si i es adyacente a j y $A_{ij} = 0$ de otro modo. Supón que todo vértice de G es adyacente exactamente con d otros vértices. Entonces:

a) A siempre es invertible;

b) A es triangular superior;

c) $(1, \dots, 1)$ es un eigenvector de A.

d) $A = A^{-1}$

e) $\det(A) = 0$.

11. Sea A una matriz real de 4×4 tal que $-1, 1, -2, 2$ son sus eigenvalores. Sea $B = A^4 - 5A^2 + 5I$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

a) $\det(A + B) = 0$;

b) $\det(B) = 1$;

c) $\operatorname{tr}(A + B) = 1$;

d) $\operatorname{tr}(A - B) = 0$;

e) $\operatorname{tr}(A + B) = 4$;

12. Sea A una matriz de $n \times n$ y λ un valor propio de A con vector propio v. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) v es un vector propio de $-A$ con valor propio de $-\lambda$.

b) Si B es una matriz de $n \times n$ y μ es valor propio de B, entonces $\lambda\mu$ es un valor propio de AB.

c) Sea c un escalar. Entonces $(\lambda + c)^2$ es valor propio de $A^2 + 2cA + c^2 I$.

d) Si μ es valor propio de una matriz B de $n \times n$, entonces $\lambda + \mu$ es un valor propio de $A + B$.

e) $-\lambda$ es una raíz del polinomio característico de A.

13. Las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} :$$

a) ambas convergen;

b) ambas divergen;

c) la primera diverge y la segunda converge;

d) la primera converge y la segunda diverge;

e) la primera converge a $\pi/2$ y la segunda converge a $\pi/3$.

14. Sea

$$a_n = n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) + (-1)^n \frac{\cos(n)}{n}.$$

¿Cuál de los siguientes enunciados es cierto para la sucesión $\{a_n\}$.

a) converge a un número negativo;

b) converge a 0;

c) esta acotada pero no converge;

d) converge a un número positivo;

e) diverge.

15. Calcular

$$\lim_{x\to y} \frac{x^n - y^n}{x - y}.$$

a) 0;

b) ∞;

c) e;

d) ny^{n-1};

e) nx^{n-1}.

16. Sea

$$f(x) = \int_1^{x^3} \frac{1}{1+\ln t} \mathrm{d}t.$$

¿Cuánto vale $f'(2)$?

a) $\frac{1}{1+\ln 2}$;

b) $\frac{12}{1+\ln 2}$;

c) $\frac{1}{1+\ln 8}$;

d) $\frac{12}{1+\ln 8}$;

e) $\frac{8}{1+\ln 2}$;

17. Si $\sin(xy) = x$ entonces $\frac{dy}{dx}$ es igual a

a) $\frac{1}{\cos(xy)}$;

b) $\frac{1}{x\cos(xy)}$;

c) $\frac{1-y\cos(xy)}{x\cos(xy)}$.

d) $\frac{1-\cos(xy)}{\cos(xy)}$;

e) $\frac{1-x\cos(xy)}{y\cos(xy)}$;

18. ¿Cuánto vale

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x|<n} \int_{|y|<n} \sin\left(x^2+y^2\right)\, dx\, dy?$$

a) π;

b) $-\pi$;

c) 0;

d) 1;

e) no converge;

19. Calcular
$$\lim_{x\to 0^+} x^x.$$

a) ∞;

b) 1;

c) 0;

d) $\sqrt{2}$;

e) e.

20. Encuentra la derivada con respecto a x de $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

a) $\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]$;

b) $\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$;

c) $\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left[1+\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]$;

d) $2+\frac{2}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[2+\frac{2}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(2+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\right]$;

e) $\frac{2}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{2}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\right]$.

21. Sea $y(x)$ una solución a la ecuación diferencial $\sqrt{x^2+1}dy-(x/y)dx=0$ que satisface $y(\sqrt{3})=3$. ¿Cuánto vale $(y(\sqrt{8}))^2$?

a) 8;

b) 6;

c) 11;

d) 64;

e) 13.

22. Sea C la curva en $\mathbb{R}^3$ definida por las ecuaciones paramétricas

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \cos(e^t);\\
y(t) &= \operatorname{sen}(e^t);\\
z(t) &= e^t;
\end{aligned}
$$

con $t \in [0,2]$ ¿Qué longitud tiene la curva?

a) $\int_0^2 \sqrt{1+e^{2t}}dt$;

b) $e^4 - 1$;

c) $\frac{e^4+3}{2}$;

d) $\sqrt{2}(e^2-1)$;

e) 1;

23. Calcula

$$\int_0^2 \int_0^1 x^3 y e^{x^2y^2} dxdy.$$

a) $\frac{e^4-5}{16}$;

b) $\frac{e^4-5}{8}$;

c) $\frac{e^4}{8} - \frac{1}{72}$;

d) $\frac{e^4}{4} - 1$;

e) $\frac{e^4}{2} - \frac{1}{18}$.

24. Calcula la derivada parcial de la función

$$f(x,y,z) = e^{1-x\cos(y)} + ze^{-1/(1+y^2)}$$

con respecto a x en el punto $(1,0,\pi)$.

a) -1;

b) 1;

c) $-1/e$;

d) 0;

e) π;

25. Sea $X = \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$, un subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$, y $P = \{(n, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}, n > 0\}$. Entonces en el espacio X

a) P es cerrado pero no abierto.

b) P es abierto pero no cerrado.

c) P es abierto y cerrado.

d) P no es abierto ni cerrado.

e) X no es un subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$

26. Dado cualquier real positivo $x_1 > 0$, sea x_n la sucesión definida recursivamente x_{n+1} es igual al promedio entre x_n y $2/x_n$. ¿Cuánto vale $\lim_{n\to\infty} x_n$?

    a) el límite siempre es $\sqrt{2}$;

    b) el límite siempre es $\sqrt[3]{3}$;

    c) el límite es $\sqrt[3]{3}$ para algún $x_1 > 0$;

    d) el límite no existe para algún $x_1 > 0$.

    e) $\sqrt{2}x_1$;

27. ¿Cuántos homomorfismos hay entre $\mathbb{Z}_{18}$ y $\mathbb{Z}_{30}$?

    a) 2;

    b) 0;

    c) 6;

    d) 3;

    e) 30;

28. Calcula

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left| e^{\frac{2\pi i k}{n}} - e^{\frac{2\pi i (k-1)}{n}} \right|.$$

    a) 0;

    b) 2π;

    c) π;

    d) $2i$;

    e) $2e$;

29. Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión que satisface que

$$a_0 = 1 \text{ y } a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-k-1} \text{ para todo } n \geq 1.$$

Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

    a) $xf^2(x) - f(x) + 1 = 0$.

    b) $xf^2(x) - xf(x) + 1 = 0$.

c) $f^2(x) + xf(x) - 1 = 0$;

d) $f^2(x) - xf(x) + 1 = 0$.

e) $xf^2(x) + f(x) - 1 = 0$;

30. Considera el siguiente conjunto de matrices

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} s & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Z} \text{ y } s \in \{-1, 1\} \right\}.$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) G es un grupo bajo la suma de matrices;

b) G es un grupo abeliano bajo multiplicación de matrices;

c) Todo elemento de G es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$;

d) G es un grupo finitamente generado bajo multiplicación de matrices;

e) El determinante de todo elemento de G es igual a 1;