Examen de Admisión a la Maestría / Doctorado
18 de Junio de 2018

Nombre: ____

Instrucciones: En cada reactivo circula las respuestas correctas. Para una misma pregunta pueden haber varias soluciones correctas (eliga todas). Se penaliza las elecciones incorrectas. Puedes hacer cálculos en las hojas que se te proporcionaron, pero no las tienes que entregar. El exámen cuenta de 30 reactivos. Te sugerimos leer primero todos los enunciados. **No se puede usar calculadora o celular.**

Duración del examen: 2 horas

1. ¿Cuál de los siguientes conjuntos es un espacio vectorial?

   a) El conjunto de soluciones $\vec{x}$ de $A\vec{x} = 0$ donde A es una matriz de $m \times n$;

   b) El conjunto de matrices A de 2×2 tales que $\det(A) = 0$;

   c) El conjunto de polinomios $p(x)$ con $\int_{-1}^{1} p(x)dx = 0$;

   d) El conjunto de soluciones de $y = y(t)$ de $y'' + 4y' + y = 0$.

2. Sea V el espacio vectorial de los números reales sobre el campo de los números racionales. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

   a) $\dim(V)$ es numerable;

   b) $\dim(V)$ no es numerable;

   c) $\dim(V) = 1$;

   d) V no tiene base.

3. Sean a, b, c constantes con $a \neq 0$. ¿Para qué valores de x es la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & a & -b \\ -1/a & x & x^2 \end{pmatrix}$ invertible?

   a) $x = 0$;

   b) $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ o $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$;

   c) $x \neq \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $x \neq \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$;

   d) Siempre es invertible.

4. Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & a \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. ¿Para qué valores de a, la matriz A tiene a $0, 3$ y -3 como eigenvalores?

   a) $a = 0$;
   b) $a = 1$;
   c) Ningún valor de a;
   d) $a = \sqrt{2}$.

5. Sean $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas por

$$T(x, y) = (2x + y, 0), S(x, y) = (x + y, xy).$$

   ¿Cuáles de las siguientes son transformaciones lineales?

   a) T;
   b) S;
   c) $S \circ T$;
   d) $T \circ S$.

6. Encuentra todos los eigenvalores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 10001 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 10003 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 10005 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 10007 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 10009 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 10011 \end{pmatrix}.$$

   a) 0 y 1;
   b) 1000 y 1036;
   c) 10000 y 10036;
   d) 1, 10, 100, 1000, 10000 y 100000.

7. Encuentra el polinomio característico de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

a) $-\lambda^3 + 13\lambda^2 - 24\lambda - 6$;

b) $\lambda^3 - 13\lambda^2 + 24\lambda + 6$;

c) $-\lambda^3 - 3\lambda^2 - 12\lambda - 6$;

d) $\lambda^3 + 13\lambda^2 - 24\lambda - 6$.

8. Sea V el espacio vectorial de funciones reales continuas en el intervalo $[-\pi, \pi]$ con producto interior definido por $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$. Sea $S = \{1, \operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen} 2t, \cos 2t, \dots\}$. Entonces

a) S es ortogonal;

b) S es ortonormal;

c) S es una base para V.

9. Considere a $V = \mathbb{Z}_3^n$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_3$. ¿Cuántos subespacios de dimensión 1 tiene V?

a) $(3^n - 1)$;

b) $3n$;

c) $(3^n - 1)/2$;

d) 1.

10. Un grafo G es un par (V, E) donde $V = \{1, \dots, n\}$ es un conjunto de vértices, y E es un conjunto de pares de vértices llamados *aristas*. Si $\{i, j\} \in E$ decimos que i y j son adyacentes. Sea A la matriz de $n \times n$ donde $A_{ij} = 1$ si i es adyacente a j y $A_{ij} = 0$ de otro modo. Supón que todo vértice de G es adyacente exactamente con d otros vértices. Entonces:

a) A siempre es invertible;

b) A es triangular superior;

c) $(1, \dots, 1)$ es un eigenvector de A.

11. Sea P_3 el espacio vectorial de polinomios en R de grado a lo más 3. Sea $D : P_3 \to P_3$ el operador diferencial definido por $D(p(t)) = dp/dt$. ¿Cuál de las siguientes es la matriz de D con respecto a la base $\{1, t, t^2, t^3\}$.

   a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

   b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

   c) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

   d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

12. Sea A una matriz de $n \times n$ y λ un valor propio de A con vector propio v. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

   a) $-v$ es un vector propio de $-A$ con valor propio de $-\lambda$;

   b) Si B es una matriz de $n \times n$ y μ es valor propio de B, entonces $\lambda\mu$ es un valor propio de AB;

   c) Sea c un escalar. Entonces $(\lambda + c)^2$ es valor propio de $A^2 + 2cA + c^2 I$;

   d) Si μ es valor propio de una matriz B de $n \times n$, entonces $\lambda + \mu$ es un valor propio de $A + B$;

   e) $-\lambda$ es una raíz del polinomio característico de A.

13. Sea $f(x) = 1/(1 + x)$. ¿Cuál es la n-ésima derivada de f?

   a) $n!(1 + x)^{n+1}$;

   b) $-n!/(1 + x)^{n+1}$;

   c) $-n!/(1 + x)^n$;

   d) $(-1)^n n!/(1 + x)^{n+1}$.

14. Encuentra la derivada con respecto a x de $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

   a) $\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]$;
   b) $\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$;
   c) $\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left[1+\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]$;
   d) $\frac{2}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{2}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\right]$.

15. Las siguientes funciones están definidas para todos los valores de x excepto $x=0$. ¿Cuáles funciones se pueden definir en $x=0$ de manera que la función sea continua en $x=0$?

   a) $\mathrm{sen}(1/x)$;
   b) $\cos(1/x)$;
   c) $\frac{\tan(x)}{x}$;
   d) x/x^2.

16. Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función tal que su serie de Taylor converge a $f(x)$ para todo número real x. Si $f(0)=2$, $f'(0)=2$ y $f^{(n)}(0)=3$ para todo $n\geq 2$, entonces $f(x)$ es igual a

   a) $3e^x+2x-1$;
   b) $e^{3x}+2x+1$;
   c) $3e^x-x-1$;
   d) $e^{3x}-x+1$.

17. Sea

$$f(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt[3]{\sin t}\,dt.$$

   ¿En qué valor de x en el intervalo $[0,2\pi]$ alcanza $f(x)$ su máximo?

   a) 0;
   b) $\pi/2$;
   c) π;
   d) $3\pi/2$.

18. Una particula se mueve en una línea recta de manera que su velocidad al tiempo t es igual a $v(t) = 3t^3$. ¿En qué tiempo t en el intervalo $t = 0$ a $t = 9$ es su velocidad igual a su velocidad promedio durante todo el intervalo.

   a) 3;
   b) 4;
   c) $3\sqrt[3]{3}$;
   d) $\frac{9}{2}\sqrt[3]{2}$.

19. sea
$$a_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right) + (-1)^n \frac{\cos(n)}{n}.$$
   ¿Qué enunciados son ciertos de la sucesión a_n?

   a) Converge a 0;
   b) Es acotada pero no converge;
   c) Converge a un número positivo.
   d) Diverge.

20. ¿Cuál de las siguientes condiciones es necesaria para que una función f sea Riemann integrable en el intervalo cerrado $[a, b]$?

   a) f es acotada en $[a, b]$;
   b) f es continua en $[a, b]$;
   c) f es diferenciable en $[a, b]$.

21. Calcule la integral impropia $\int_1^\infty \frac{1}{e^x+1} dx$.

   a) $\ln(1 + e^{-1})$;
   b) $-\ln(1 + e^{-1})$;
   c) No existe;
   d) $\ln(1 + e)$.

22. ¿Cuál de las siguientes es la ecuación del plano tangente a la superficie $x^2+y^2-3z = 2$ en el punto $(-2, -4, 6)$?

   a) $x + y + z - 2 = 0$;
   b) $-2x - 4y + 6z = 0$;
   c) $-2x - 4y + 6z - 2 = 0$;
   d) $4x + 8y + 3z + 22 = 0$.

23. Sea $u = xy^z$. Calcula
$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}.$$

a) $3u$;

b) $u(1 + z + z^2/y)$;

c) $u(1 + z^2/y + y \ln z)$;

d) $u(1 + z + z \ln y)$.

24. Calcula
$$\int_0^2 \int_0^1 x^3 y e^{x^2 y^2} dx dy.$$

a) $\frac{e^4-5}{16}$;

b) $\frac{e^4}{8} - \frac{1}{72}$;

c) $\frac{e^4}{4} - 1$;

d) $\frac{e^4}{2} - \frac{1}{18}$.

25. ¿Cuántos de sus elementos generan a $\mathbb{Z}_{12}$?

a) 1;

b) 4;

c) 3;

d) 6.

26. Sea G un grupo multiplicativo tal que $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ para todo a, b en G. Entonces

a) G es abeliano;

b) G no es abeliano;

c) G es simple;

d) G es cíclico.

27. Sea S_n el grupo de permutaciones de $\{1, \ldots, n\}$. Sea H el grupo generado por las permutaciones $(1, 2)$ y $(1, 2, 3, \ldots, n)$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) H es abeliano;

b) H el grupo diédrico D_n;

c) H es el grupo alternante A_n;

d) H es todo S_n.

28. ¿Cuál de las siguientes funciones **no** es uniformemente continua en $(0,1)$?

   a) x^2;
   b) $1/x^2$;
   c) $f(x) = 1$ para $x \in (0,1)$ y $f(0) = f(1) = 0$;
   d) $\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$.

29. ¿Cuáles de las siguientes funciones definen una métrica en $\mathbb{R}$?

   a) $d(x,y) = xy$;
   b) $d(x,y) = 0$ si $x = y$ y $d(x,y) = 1$ si $x \neq y$;
   c) $d(x,y) = \text{máx}\{|x|, |y|\}$;
   d) $d(x,y) = (x-y)^2$.

30. ¿Cuáles de los siguientes son subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$?

   a) $[0,1] \cup [5,6]$;
   b) $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$;
   c) $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1$ x es irracional $\}$;
   d) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{0\}$.