

Examen de Admisión

26 de julio de 2024

(3 horas)

Resuelva correctamente al menos 3 problemas completos de cada tema.

Justifique todas sus respuestas.

I. Álgebra Lineal

1. Sea $\omega \in \mathbb{C}$ y defina la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}.$$

Considere el polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, donde los coeficientes a_k son números complejos. Calcule la traza de la matriz $p(A)$.

2. Sea $X \subset \mathbb{R}^\infty$ el espacio de sucesiones reales convergentes y sea $L : X \rightarrow X$ el operador tal que

$$L(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

Demuestre que T es lineal y exhiba al menos un eigenvalor con su correspondiente eigenvector.

3. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ el operador lineal dado por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + 3x_3, 2x_1).$$

Encuentre el adjunto de T .

4. Sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el operador lineal dado por

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, 2x_2, \dots, nx_n).$$

Encuentre sus eigenvalores y eigenvectores.

5. Sea $X = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ el espacio de polinomios sobre el campo \mathbb{R} . Considere el operador lineal $M : X \rightarrow X$ dado por $p(x) \mapsto x^2p(x)$. ¿Es M invertible?

II. Cálculo

6. Determine si la siguiente sucesión converge o diverge:

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}, n = 1, 2, \dots$$

7. Sean f y g dos funciones $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha > 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$. Demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f \circ g(x) = \alpha.$$

8. Calcule el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^4}.$$

9. Sea $\{a_n\}$ una sucesión en \mathbb{R} tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha > 0$ y considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. Determine cual es el conjunto de valores $z \in \mathbb{C}$ donde la serie converge.
10. Escoja algunas de las siguientes 2 funciones y demuestre que su integral es finita en $(0, 1)$:

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\log(x)}, \quad g(x) = \frac{x \log(x)}{1+x^2}.$$