Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

3 de Julio del 2008

1. Algebra Lineal

1.1 Sea M una matriz de 3×3 con entradas reales tal que $M^3 = I_{3\times 3}$ y $M \neq I_{3\times 3}$, donde $I_{3\times 3}$ es la matriz identidad de 3×3.

(i) ¿Cuales son los eigenvalores de M?

(ii) De un ejemplo de una matriz M que satisfaga estas condiciones.

1.2 Sea $M \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ una matriz Hermitiana la cual satisface la siguiente condición:

$$M^5 + M^3 + M = I_{n\times n}.$$

Demuestre que $M = I_{n\times n}$.

Una matriz es Hermitiana si es auto-adjunta, esto es, si es igual a su transpuesta conjugada.

1.3 Sea M una matriz de $n \times n$ con entradas reales y M^t su transpuesta. Demuestre que $M^t M$ Y M^t tienen el mismo rango.

2. Cálculo

2.1 Sea f una función continua en $[0, 1]$. Calcule el siguiente limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f(x)dx.$$

2.2 ¿Para que números reales $a \in (1, \infty)$ se satisface que $x^a \leq a^x$ para toda $x \in (1, \infty)$?

2.3 Demuestre que la ecuación $ae^x = 1+x+\frac{x^2}{2}$, donde a es una constante positiva, tiene exactamente una raiz real.

3. Problemas opcionales

3.1 Calcule la siguiente integral

$$\int_0^{2\pi} e^{(e^{ix}-ix)}dx.$$

Sugerencia: Use la formula integral de Cauchy para derivadas.

3.2 Sea R el conjunto de números complejos de la forma

$$a + 3bi \text{ con } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Demuestre que R es un subanillo de $\mathbb{C}$ y un dominio entero, pero no un dominio de factorización unica.

3.3 Demuestre que todo grupo de orden p^2, con p un número primo, es abeliano.

3.4 Demuestre o de un contraejemplo. Todo conjunto conexo, localmente conexo por trayectorias de $\mathbb{R}^n$ es conexo por trayectorias.

Un conjunto es localmente conexo por trayectorias si toda vecindad alrededor de todo punto contiene una vecindad que es conexa por trayectorias.