Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

26 de febrero del 2001

1. Algebra lineal

1.1 Determine para que valores reales a, b la siguiente matriz es diagonalizable sobre los numeros reales:

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

1.2 Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^4$ que consiste de todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales homoéneas

$$x + 3z + 2w = 0$$
$$x + y + w = 0$$
$$x + z = 0$$

Determina la dimensión V.

1.3 Encontrar una base ortonormal para el subespacio de $\mathbb{R}^4$ genrado por los vectores (1,0,-1,0),(1,0,1,1) y (,0,0,1,1).

2. Cálculo

2.1 Determina para que valores de n entero la siguiente integral es finita:

$$\int_1^\infty x^n dx$$

2.2 Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que tiene primera y segunda derivadas continuas. Probar que si $f"(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces f stisface exactamente una de las siguientes condiciones:

1. f es estrictamente creciente,

2. f es estrictamente decreciente,

3. f posee un único mnimo global

2.3 Probar que entre todos los rectangulos de perímetro fijo P el cuadrado de lado $P/4$ posee el área máxima.

3. Problemas opcionales

3.1 Sean K_1 y K_2 dos subconjuntos compactos disjuntos de $\mathbb{R}^n$. Probar que existen abiertos disjuntos U_1 y U_2 tales que $k_1 \subset U_1$ y $K_2 \subset U_2$.

3.2 Sea G un gupo finito. Probar que si $G/C(G)$ es cíclico ($C(G)$ denota el centro de G), entonces G es abeliano.

3.3 Dar un ejemplo de una sucesión $(f_n)_n \subset L^1(\mathbb{R})$ tal que $\lim_{n \longrightarrow \infty} f_n(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ pe ro que cumpla $\int f_n = 1$ para todo n

3.4 Mostrar que existe un mapeo holomorfo con inversa holomorfa $f : \triangle \longrightarrow H$ donde $\triangle = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ y $H = \{z \in \mathbb{C} | Im(z) > 0\}$.