Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

7 de enero del 2001

1. Algebra lineal

1.1 Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x - y, y - z)$. Encuentre el núcleo, la imagen, la nulidad y el rango de T.

1.2 Sea P_2 el espacio vectorial de polinomios reales de grado menor ó igual que $2 : P_2 = \{a + bx + cx^2 | a, b, c \ \in \ \mathbb{R}\}$. La base usual (ó canónica) de P_2 está dada por los polinomios $1, x, x^2$.

(a) Encuentre una base de P_2 distinta de la usual y esprese al polinomio $a + bx + cx^2$ como combinación lineal de esta base.

(b) Calcule la matriz de cambio de base, de la base canónica en términos de la base encontrada en (a).

(c) ¿Cual es la dimensión del **espacio dual** de P_2?

1.3 Sean $t_1, t_2, t_3 \ \in \ \mathbb{R}$ tres reales ditintos y sea P_2 como en el problema anterior. Para $i = 1, 2, 3$ sea

$$T_i : P_2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

la función dada por $T_i(p) = p(t_i)$, es decir, evaluación del polinomio p en t_i.

(a) Demuestre que las funciones $T_1 T_2$ y T_3 son transformaciones lineales.

(b) Pruebe que las funcionales $T_1 T_2$ y T_3 son linealmente independientes en el espacio dual de P_2 y por tanto una base para el mismo.

2. Cálculo

2.1 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a > 2b > 0$ y sea $F : [0, \frac{\pi}{3}] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por:

$$F(x) = \int_0^{\pi x} \frac{d\theta}{a\cos\theta - b\,\mathrm{sen}\theta}$$

Encuentre un punto crítico de la función $F(x) - \frac{\sqrt{2\pi}}{(a-b)}x$ en el intervalo abierto $(0, \frac{(\pi)}{3})$

2.2 Diga si las siguientes series son convergentes:

$$(a)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n} \qquad (b)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\mathrm{sen}(\pi/n)$$

2.3 Demostrar que es imposible poner $x = f(x)g(x)$ donde f y g son derivables y $f(0) = g(0) = 0$.

3. Problemas opcionales

3.1 Sea $f : X \longrightarrow Y$ una biyección continua entre dos espacios topólogicos. Muestre que si X es compacto y Y es Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.

3.2 Pruebe que si en un grupo G todo elemento es su propio inverso, entonces G es abeliano.

3.3 Supongamos que $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene derivadas parciales de orden dos. Diga cual de las siguientes identidades son ciertas:

(a) $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$

(b) $\nabla.(\nabla \times f) = 0$

(c) $\nabla.(\nabla f) = 0$

(d) $\nabla \times (\nabla . f) = \vec{0}$

3.4 Calcule la siguiente integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1}$